

Modeli merenja: Pomoćni modeli

Psihometrija 1

Prof. dr Bojan Janičić

Modeli paralelnih indikatora - Tip 1

j i k su indikatori (stavke ili testovi)

Dodatne pretpostavke

- $T_j = T_k$

imaju jednake prave skorove

- skorovi greške su slučajni pa nisu jednaki
- ali su im varijanse jednake
- zato su varijanse PI Tip 1 jednake

Modeli paralelnih indikatora - Tip 1

j i k su indikatori (stavke ili testovi)

Dodatne pretpostavke

- $T_j = T_k$
- $\sigma_j^2 = \sigma_k^2$

imaju jednake prave skorove

imaju jednake varijanse

- skorovi greške su slučajni pa nisu jednaki
- ali su im varijanse jednake
- zato su varijanse PI Tip 1 jednake

Modeli paralelnih indikatora - Tip 1

j i k su indikatori (stavke ili testovi)

Dodatne pretpostavke

- $T_j = T_k$
- $\sigma_j^2 = \sigma_k^2$

imaju jednake prave skorove

imaju jednake varijanse

- greška je slučajna i **ne korelira** ni sa čim osim sama sa sobom

Modeli paralelnih indikatora - Tip 1

Dodatno

- $T_j = T$
- $\sigma_j^2 = \sigma^2$
- Pravi skor – prosečni skor koji bi osoba dobila na beskonačnom broju paralelnih formi testa (pod pretpostavkom da odgovaranje na test ne utiče na osobu)
- Pravi skor je uvek isti, a greška se menja jer je slučajna
 - na beskonačnom broju testiranja njeni efekti bi se poništili

Modeli paralelnih indikatora - Tip 1

j i k su indikatori (stavke ili testovi)

Dodatne pretpostavke

- $T_j = T_k$
- $\sigma_j^2 = \sigma_k^2$
- $\sigma_{jk} = \sigma_{lk}$

imaju jednake prave skorove

imaju jednake varijanse

imaju jednake kovarijanse

- greška je slučajna i **ne korelira** ni sa čim osim sama sa sobom
- prema tome, kovarijanse zavise **samo od pravih skorova**
- pošto imaju jednake varijanse pravih skorova imaju i jednake kovarijanse (korelacije) sa bilo kojom drugom varijablom pa i međusobno

Modeli paralelnih indikatora - Tip 1

j i k su indikatori (stavke ili testovi)

Dodatne pretpostavke

- $T_j = T_k$ imaju jednake prave skorove
- $\sigma_j^2 = \sigma_k^2$ imaju jednake varijanse
- $\sigma_{jk} = \sigma_{lk}$ imaju jednake kovarijanse
- $r_{jk} = r_{tt} = \sigma_\tau^2 / \sigma^2$ Ako su ispunjeni ovi zahtevi modela onda:

Modeli paralelnih indikatora - Tip 1

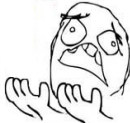
j i k su indikatori (stavke ili testovi)

Dodatne pretpostavke

- $T_j = T_k$ imaju jednake prave skorove
- $\sigma_j^2 = \sigma_k^2$ imaju jednake varijanse
- $\sigma_{jk} = \sigma_{lk}$ imaju jednake kovarijanse
- $r_{jk} = r_{tt} = \sigma_\tau^2 / \sigma^2$ Ako su ispunjeni ovi zahtevi modela onda:

- Pouzdanost nekog indikatora jednaka je njegovoj korelaciji sa nekim drugim, njemu paralelnim indikatorom

Logika

- Želimo da saznamo pravi skor i pravu varijansu (T)
- Ali, kako? 
- Greška (E) je slučajna – ne korelira ni sa čim
- Šta nam onda može ukazati na pravu varijansu?
 - Kovarijanse – jer potiču samo od pravih skorova (T)

Logika

Prisetite se kako se računa
varijansa i kovarijansa 😊

Pošto po definiciji PI Tip 1 imaju jednake prave skorove imaće i jednake varijanse pravih skorova:

$$\sigma_{Tj}^2 = \sigma_{Tk}^2$$

koje će biti jednake njihovoj kovarijansi.

Onda je i:

$$\sigma_{Tjk} = \sigma_{Tj}^2 = \sigma_{Tk}^2 = \sigma_{\tau}^2$$

Pravu varijansu možemo proceniti na osnovu kovarijansi (korelacija) paralelnih indikatora

		TEST A			TEST B		
	Y	T	E		Y	T	E
Ispitanik 1	12	11	1		11	11	0
Ispitanik 2	10	11	-1		15	11	4
Ispitanik 3	14	8	6		10	8	2

TEST A				TEST B			
	Y	T	E	Y	T	E	
Ispitanik 1	12	11	1	11	11	0	
Ispitanik 2	10	11	-1	15	11	4	
Ispitanik 3	14	8	6	10	8	2	

TEST A				TEST B			
	Y	T	E	Y	T	E	
Ispitanik 1	12	11	1	11	11	0	
Ispitanik 2	10	11	-1	15	11	4	
Ispitanik 3	14	8	6	10	8	2	

Pravi skorovi na dva testa jednaki

TEST A				TEST B			
	Y	T	E	Y	T	E	
Ispitanik 1	12	11	1	11	11	0	
Ispitanik 2	10	11	-1	15	11	4	
Ispitanik 3	14	8	6	10	8	2	

Pravi skorovi na dva testa jednaki

TEST A				TEST B			
AS pravih skorova = 10							
	T	$T - M_{Ta}$	$(T - M_{Ta})^2$	T	$T - M_{Tb}$	$(T - M_{Tb})^2$	
Ispitanik 1	11	1	1	11	1	1	
Ispitanik 2	11	1	1	11	1	1	
Ispitanik 3	8	-2	4	8	-2	4	

		TEST A			TEST B		
	Y	T	E		T	E	
Ispitanik 1	12	11	1		11	0	
Ispitanik 2	10	11	-1		11	4	
Ispitanik 3	14	8	6		8	2	

Pravi skorovi na dva testa jednaki

AS pravih skorova = 10				TEST A		TEST B	
	T	$T - M_{Ta}$	$(T - M_{Ta})^2$		$T - M_{Tb}$	$(T - M_{Tb})^2$	
Ispitanik 1	11	1	1		1	1	
Ispitanik 2	11	1	1		1	1	
Ispitanik 3	8	-2	4		-2	4	

TEST A				TEST B			
	Y	T	E	Y	T	E	
Ispitanik 1	12	11	1	11	11	0	
Ispitanik 2	10	11	-1	15	11	4	
Ispitanik 3	14	8	6	10	8	2	

Pravi skorovi na dva testa jednaki

TEST A				TEST B			
AS pravih skorova = 10							
	T	$T - M_{Ta}$	$(T - M_{Ta})^2$	T	$T - M_{Tb}$	$(T - M_{Tb})^2$	
Ispitanik 1	11	1	1	11	1	1	
Ispitanik 2	11	1	1	11	1	1	
Ispitanik 3	8	-2	4	8	-2	4	
Varijansa (suma/n)				Varijansa (suma/n)			

TEST A				TEST B			
	Y	T	E	Y	T	E	
Ispitanik 1	12	11	1	11	11	0	
Ispitanik 2	10	11	-1	15	11	4	
Ispitanik 3	14	8	6	10	8	2	

Pravi skorovi na dva testa jednaki

TEST A				TEST B			
	T	$T - M_{Ta}$	$(T - M_{Ta})^2$	T	$T - M_{Tb}$	$(T - M_{Tb})^2$	
Ispitanik 1	11	1	1	11	1	1	
Ispitanik 2	11	1	1	11	1	1	
Ispitanik 3	8	-2	4	8	-2	4	

AS pravih skorova = 10

Varijansa (suma/n)

Varijansa (suma/n)

	TEST A $T - M_{Ta}$	TEST B $T - M_{Tb}$	kov.
Ispitanik 1	1	1	1
Ispitanik 2	1	1	1
Ispitanik 3	-2	-2	4

TEST A				TEST B			
	Y	T	E	Y	T	E	
Ispitanik 1	12	11	1	11	11	0	
Ispitanik 2	10	11	-1	15	11	4	
Ispitanik 3	14	8	6	10	8	2	

Pravi skorovi na dva testa jednaki

TEST A				TEST B			
AS pravih skorova = 10							
	T	$T - M_{Ta}$	$(T - M_{Ta})^2$	T	$T - M_{Tb}$	$(T - M_{Tb})^2$	
Ispitanik 1	11	1	1	11	1	1	
Ispitanik 2	11	1	1	11	1	1	
Ispitanik 3	8	-2	4	8	-2	4	
Varijansa (suma/n)				Varijansa (suma/n)			

	TEST A		TEST B		
	$T - M_{ta}$	*	$T - M_{Tb}$	*	kov.
Ispitanik 1	1	*	1	*	1
Ispitanik 2	1	*	1	*	1
Ispitanik 3	-2	*	-2	*	4

TEST A				TEST B			
	Y	T	E	Y	T	E	
Ispitanik 1	12	11	1	11	11	0	
Ispitanik 2	10	11	-1	15	11	4	
Ispitanik 3	14	8	6	10	8	2	

Pravi skorovi na dva testa jednaki

TEST A				TEST B			
AS pravih skorova = 10							
	T	$T - M_{Ta}$	$(T - M_{Ta})^2$	T	$T - M_{Tb}$	$(T - M_{Tb})^2$	
Ispitanik 1	11	1	1	11	1	1	
Ispitanik 2	11	1	1	11	1	1	
Ispitanik 3	8	-2	4	8	-2	4	
Varijansa (suma/n)				Varijansa (suma/n)			

	TEST A		TEST B		
	T-M _{ta}		T-M _{Tb}		kov.
Ispitanik 1	1	*	1		1
Ispitanik 2	1	*	1		1
Ispitanik 3	-2	*	-2		4
					Kovarijansa (suma/n)

Jednako!

Postupno...

- Korelacija dva paralelna indikatora je njihova pouzdanost

- Korelacija:

$$r_{jk} = \sum y_j y_k / n \sigma_j \sigma_k$$

- y su devijacioni skorovi (odstupanja rezultata od aritmetičke sredine)

Postupno...

Deo izraza $\sum y_j y_k / n$ je kovarijansa dva paralelna indikatora (ajtema, testa...) i pošto zavisi samo od pravih skorova može se napisati i kao $\sum t_j t_k / n$

- Korelacija dva paralelna indikatora je njihova pouzdanost
- Korelacija:

$$r_{jk} = \sum y_j y_k / n \sigma_j \sigma_k$$

- y su devijacioni skorovi (odstupanja rezultata od aritmetičke sredine)

Postupno...

- Korelacija dva paralelna indikatora je njihova pouzdanost
- Korelacija:

$$r_{jk} = \sum t_j t_k / n \sigma_j \sigma_k$$

Postupno...

Pošto po definiciji paralelni indikatori tip 1 imaju jednake prave skorove, izraz $\sum t_j t_k / n$ može se napisati i kao $\sum t^2 / n$ (varijansa pravog skora σ_t^2)

- Korelacija dva paralelna indikatora je njihova pouzdanost
- Korelacija:

$$r_{jk} = \sum t_j t_k / n \sigma_j \sigma_k$$

Postupno...

- Korelacija dva paralelna indikatora je njihova pouzdanost
- Korelacija:

$$r_{jk} = \sum t^2 / n \sigma_j \sigma_k$$

Postupno...

- Korelacija dva paralelna indikatora je njihova pouzdanost

- Korelacija:

$$r_{jk} = \sum t^2 / n \sigma_j \sigma_k$$

Ostatak izraza $\sigma_j \sigma_k$, pošto po definiciji modela PI imaju jednake varijanse, može se napisati jednostavno σ^2 , pa izraz postaje...

Postupno...

- Korelacija dva paralelna indikatora je njihova pouzdanost
- Korelacija:

$$r_{jk} = \sigma_t^2 / \sigma^2$$

Postupno...

- Korelacija dva paralelna indikatora je njihova pouzdanost
- Korelacija:

$$r_{jk} = \sigma_t^2 / \sigma^2$$

Što je opšta formula pouzdanosti (prava/ukupna varijansa)

Postupno...

- Korelacija dva paralelna indikatora je njihova pouzdanost

$$r_{jk} = \sigma_t^2 / \sigma^2$$

Što je opšta formula pouzdanosti (prava/ukupna varijansa)

Odnosno, proporcija prave u ukupnoj varijansi (kvadrat korelacije sa pravim skorom – njen koeficijent determinacije)

Modeli paralelnih indikatora - Tip 2

Tau ekvivalentni (τ tau pravi skor)

- $T_j = T_k$
- $\sigma_j^2 \neq \sigma_k^2$

imaju jednake prave skorove

nemaju jednake varijanse

- jednake varijanse pravih skorova ($\sigma_{Tj}^2 = \sigma_{Tk}^2$)
- skorovi greške su slučajni pa nisu jednaki
- za PI Tip 2 nije nužno da su varijanse greške jednake
- zato neće imati ni jednake AS ukupnih skorova

Modeli paralelnih indikatora - Tip 2

Tau ekvivalentni (τ tau pravi skor)

- $T_j = T_k$
- $\sigma_j^2 \neq \sigma_k^2$

imaju jednake prave skorove

nemaju jednake varijanse

- greška je slučajna i **ne korelira** ni sa čim osim sama sa sobom ($r_{EjEk}=0$)
- prema tome, korelacije zavise **samo od pravih skorova**
- pošto imaju jednake varijanse pravih skorova imaće i jednake kovarijanse (korelacije) sa bilo kojom drugom varijablom pa i međusobno
- u suštini, samo pravi skorovi su bitni

Modeli paralelnih indikatora - Tip 2

Tau ekvivalentni (τ tau pravi skor)

- $T_j = T_k$
- $\sigma_j^2 \neq \sigma_k^2$
- $\sigma_{jk} = \sigma_{lk}$

imaju jednake prave skorove

nemaju jednake varijanse

imaju jednake kovarijanse

- greška je slučajna i **ne korelira** ni sa čim osim sama sa sobom ($r_{EjEk}=0$)
- prema tome, korelacije zavise **samo od pravih skorova**
- pošto imaju jednake varijanse pravih skorova imaće i jednake kovarijanse (korelacije) sa bilo kojom drugom varijablom pa i međusobno
- u suštini, samo pravi skorovi su bitni

Modeli paralelnih indikatora - Tip 2

Tau ekvivalentni (τ tau pravi skor)

- $T_j = T_k$ imaju jednake prave skorove
- $\sigma_j^2 \neq \sigma_k^2$ nemaju jednake varijanse
- $\sigma_{jk} = \sigma_{lk}$ imaju jednake kovarijanse
- $r_{jk} = r_{tt} = \sigma_\tau^2 / \sigma^2$

Od modela PI Tip 1 razlikuje se po proceni ukupne varijanse

Modeli paralelnih indikatora - Tip 2

Tau ekvivalentni (τ tau pravi skor)

- $T_j = T_k$ imaju jednake prave skorove
- $\sigma_j^2 \neq \sigma_k^2$ nemaju jednake varijanse
- $\sigma_{jk} = \sigma_{lk}$ imaju jednake kovarijanse
- $r_{jk} = r_{tt} = \sigma_\tau^2 / \sigma^2$

Od modela PI Tip 1 razlikuje se po proceni ukupne varijanse

Model je manje strog od modela PI Tip 1 (indikator moraju da ispune manje zahteva) što rezultira višom procenom pouzdanosti

Modeli paralelnih indikatora - Tip 3

Kongenerički (istog porekla)

- $T_j \neq T_k$ nemaju jednake prave skorove
- $\sigma_j^2 \neq \sigma_k^2$ nemaju jednake varijanse

Modeli paralelnih indikatora - Tip 3

Kongenerički (istog porekla)

- $T_j \neq T_k$
- $\sigma_j^2 \neq \sigma_k^2$

nemaju jednake prave skorove

nemaju jednake varijanse

- skorovi greške su slučajni pa nisu jednaki
- za PI Tip 3 nije nužno da su varijanse greške jednake
- zato neće imati ni jednake AS ukupnih skorova
 - slično kao kod PI Tip 2 samo što nemaju jednake ni prave skorove

Modeli paralelnih indikatora - Tip 3

Kongenerički (istog porekla)

- $T_j \neq T_k$
- $\sigma_j^2 \neq \sigma_k^2$
- $\sigma_{jk} \neq \sigma_{lk}$

nemaju jednake prave skorove

nemaju jednake varijanse

nemaju jednake kovarijanse

- skorovi greške su slučajni pa nisu jednaki
- za PI Tip 3 nije nužno da su varijanse greške jednake
- zato neće imati ni jednake AS ukupnih skorova
 - slično kao kod PI Tip 2 samo što nemaju jednake ni prave skorove

Modeli paralelnih indikatora - Tip 3

Kongenerički (istog porekla)

- $T_j \neq T_k$
- $\sigma_j^2 \neq \sigma_k^2$
- $\sigma_{jk} \neq \sigma_{lk}$

nemaju jednake prave skorove

nemaju jednake varijanse

nemaju jednake kovarijanse

- greška je slučajna i **ne korelira** ni sa čim osim sama sa sobom
- prema tome, korelacije zavise **samo od pravih skorova**
- nemaju jednake prave skorove pa ni kovarijanse nisu jednake, ali...
- jedini zahtev je da imaju samo jedan (isti) predmet merenja pa korelacije potiču od njega

Modeli paralelnih indikatora - Tip 3

Kongenerički (istog porekla)

- $T_j \neq T_k$ nemaju jednake prave skorove
- $\sigma_j^2 \neq \sigma_k^2$ nemaju jednake varijanse
- $\sigma_{jk} \neq \sigma_{lk}$ nemaju jednake kovarijanse

- Jedini zahtev je da imaju samo jedan zajednički izvor (predmet merenja)

Model je manje strog od modela PI Tip 1 i Tip 2 (indikatori moraju da ispune manje zahteva) što rezultira još višom procenom pouzdanosti

domen=populacija=univerzum
koriste se kao sinonimi

Model uzorkovanja iz domena

- Model „slučajno paralelnih indikatora“
- Druga populacija i drugi uzorak
- Domen crte čine sva ponašanja koja izaziva ili na koja utiče neka crta → domen indikatora
- Svaki test obuhvata samo jedan *slučajan* uzorak tih ponašanja
- Pravi skor je onaj koji bi ispitanik dobio kad bi bio ispitan svim ajtemima iz domena

Šta je prva populacija?

Model uzorkovanja iz domena

- Model zahteva **jednodimenzionalnost** (zajedničko jezgro koje mere sve stavke)
- Za izvođenje modela nije bitna veličina uzorka indikatora (može biti 1 ajtem), ni format, ni skala ajtema
 - pretpostavlja se da su skorovi standardizovani
 - skor se formira kao suma z skorova
- Domen je beskonačan, a testiranje se obavlja na domenu

Model uzorkovanja iz domena

- Povezanosti među indikatorima se izražavaju matricom korelacija \mathbf{R}^∞ koja je beskonačna kao i domen (opisuje se prosečnom korelacijom u matrici)
 - Prosečne (očekivane) korelacije svake varijable (indikatora) u matrici su jednake i jednake su prosečnoj korelaciji u \mathbf{R}
 - manje restriktivno od modela PI Tip1 i 2 (jednake samo prosečne, a ne sve korelacije/kovarijanse)
 - raspršenje pojedinačnih korelacija oko prosečne govori koliko se varijable razlikuju u posedovanju zajedničkog jezgra
- Svaki test je *slučajan uzorak* iz beskonačnog domena koji čine svi testovi iste dužine
 - korelacija pojedinačnog testnog skora sa sumom svih skorova (pravim skorom) biće jednaka za sve testove iste dužine

Beskonačnost

- $\infty - 1 = ?$ ~~1~~ i dalje ∞
- aritmetičke sredine, standardne devijacije, korelacije... slučajnih uzoraka će se samo slučajno razlikovati
- na beskonačnom domenu slučajne greške će se potirati (prosek će im biti 0)

Model uzorkovanja iz domena

- Na nivou ajtema

$$\bar{r}_{1.} = \bar{r}_{2.} = \dots = \bar{r}_{j.} = \bar{r}_{jk}$$

- \bar{r}_{jk} je prosečna korelacija u matrici R^∞

Model uzorkovanja iz domena

- Na nivou ajtema

prosečne korelacije svakog ajtema sa svim ostalim jednake su kako među sobom tako i sa prosečnom korelacijom u matrici R^∞

$$\bar{r}_{1.} = \bar{r}_{2.} = \dots = \bar{r}_{j.} = \bar{r}_{jk}$$

- \bar{r}_{jk} je prosečna korelacija u matrici R^∞

Model uzorkovanja iz domena

- Na nivou ajtema

prosečne korelacije svakog ajtema sa svim ostalim jednake su kako među sobom tako i sa prosečnom korelacijom u matrici R^∞

$$\bar{r}_{1.} = \bar{r}_{2.} = \dots = \bar{r}_{j.} = \bar{r}_{jk}$$

- \bar{r}_{jk} je prosečna korelacija u matrici R^∞

$$r_{j(1\dots m)} = r_{jT} = \sqrt{\bar{r}_{jk}} = \sqrt{\bar{r}_{j.}} \quad m \rightarrow \infty$$

Model uzorkovanja iz domena

- Na nivou ajtema

prosečne korelacije svakog ajtema sa svim ostalim jednake su kako među sobom tako i sa prosečnom korelacijom u matrici R^∞

$$\bar{r}_{1.} = \bar{r}_{2.} = \dots = \bar{r}_{j.} = \bar{r}_{jk}$$

- \bar{r}_{jk} je prosečna korelacija u matrici R^∞

$$r_{j(1\dots m)} = r_{jT} = \sqrt{\bar{r}_{jk}} = \sqrt{\bar{r}_{j.}} \quad m \rightarrow \infty$$

korelacija ajtema sa svim drugim jednaka je korelaciji sa pravim skorom (pošto $1\dots m$ i jeste T), odnosno korenu prosečne korelacije u matrici (kada domen teži beskonačnosti)

Model uzorkovanja iz domena

prosečne korelacije svakog ajtema sa svim ostalim jednake su kako među sobom tako i sa prosečnom korelacijom u matrici R^∞

- Na nivou ajtema

$$\bar{r}_{1.} = \bar{r}_{2.} = \dots = \bar{r}_{j.} = \bar{r}_{jk}$$

- \bar{r}_{jk} je prosečna korelacija u matrici R^∞

$$r_{j(1\dots m)} = r_{jT} = \sqrt{\bar{r}_{jk}} = \sqrt{\bar{r}_{j.}} \quad m \rightarrow \infty$$

- Na nivou testova

$$\bar{r}_{j.} = \bar{r}_{jk} = \dots = r_{jT}^2$$

- r_{jT} je korelacija j-tog testa sa pravim skorom

ovde će korelacije biti veće jer veći broj ajtema bolje reprezentuje domen

Model uzorkovanja iz domena

- Na nivou ajtema

prosečne korelacije svakog ajtema sa svim ostalim jednake su kako među sobom tako i sa prosečnom korelacijom u matrici R^∞

$$\bar{r}_{1.} = \bar{r}_{2.} = \dots = \bar{r}_{j.} = \bar{r}_{jk}$$

- \bar{r}_{jk} je prosečna korelacija u matrici R^∞

$$r_{j(1\dots m)} = r_{jT} = \sqrt{\bar{r}_{jk}} = \sqrt{\bar{r}_{j.}} \quad m \rightarrow \infty$$

- Na nivou testova

$$\bar{r}_{j.} = \bar{r}_{jk} = \dots = r_{jT}^2$$

Po ovom modelu, najbolja procena pouzdanosti nekog testa je prosečna korelacija tog testa sa svim ostalim testovima iste dužine (iz istog domena)

Što je veći broj zahteva modela (što je model restriktivniji), podaci će ih teže ispuniti i procena pouzdanosti biće niža

Poređenje zahteva modela

<i>Jednako</i>	Tip 1 Striktno paralelni	Tip 2 Tau ekvivalentni	Tip 3 Kongenerički	Model uzorkovanja iz domena
T	✓	✓	✗	✗
σ_T^2	✓	✓	✗	✗
$\sigma_j \sigma_k$	✓	✓	✗	✓ prosečne
σ_E^2	✓	✗	✗	✗
σ^2	✓	✗	✗	✗
\bar{X}	✓	✗	✗	✗
izvor	✓	✓	✓	✓

Literatura

- Fajgelj, S. (2013). *Psihometrija—Metod i teorija psihološkog merenja*. Beograd: Centar za primenjenu psihologiju.
 - strane 155-162. i 166-169.
- Fajgelj, S. (2020). *Psihometrija—Metod i teorija psihološkog merenja*. Beograd: Centar za primenjenu psihologiju.
 - strane 150-156. i 160-164.